

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSOLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Luka Liker

**SWARCH MODELI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Boris Podobnik

Zagreb, srpanj, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem svojoj obitelji, prijateljima i kolegama na potpori svih ovih godina te svom mentoru na pomoći tijekom izrade i obrane ovog diplomskog rada.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Specifikacije modela</b>	<b>3</b>
1.1 Markov Regime Switching model . . . . .	3
1.2 Markov Regime Switching ARCH modeli . . . . .	4
1.3 E-SWARCH . . . . .	7
1.4 Multivarijantni SWARCH . . . . .	8
<b>2 Procjena SWARCH modela</b>	<b>10</b>
2.1 Opis algoritma . . . . .	10
2.2 Testiranje adekvatnosti modela . . . . .	12
2.3 Prognoze . . . . .	13
2.4 Ustrajnost ARCH komponente . . . . .	15
<b>3 Primjer</b>	<b>16</b>
3.1 Model i podaci . . . . .	16
3.2 Rezultati . . . . .	18
<b>Bibliografija</b>	<b>21</b>

# Uvod

Volatilnost financijskog niza podataka se može pojednostavnjeno predstaviti kao fluktuacija u povratima. Pitanje volatilnosti je iznimno važno za mnoge financijske aktivnosti kao što su *risk management*, određivanje cijena izvedenica, *hedging* i upravljanja portfeljima, jer je volatilnost financijske imovine važna odrednica njezine cijene. Tijekom proteklih desetljeća, postojao je golem interes za modeliranjem i predviđanjem volatilnosti, kako među profesionalcima na tržištu, tako i unutar akademskih krugova. S obzirom na važnost volatilnosti, razvijeni su mnogi modeli.

Popularan doprinos tehnikama korištenim u području analize ekonomskih vremenskih nizova, bio je pristup modeliranju volatilnosti kao specifikacija autoregresivne uvjetne heteroskedastičnosti (ARCH), koju je razvio Engle [10]. Kasnije, Bollerslev [2] je generalizirao ARCH model, predstavivši GARCH model. Familija ARCH modela uspješno je primjenjivana na financijske podatke i postala jedno od najpopularnijih oruđa za izučavanje volatilnosti na financijskim tržištima, zbog sposobnosti modeliranja dobro poznatog fenomena *grupiranja volatilnosti*, to jest, tendencije da velike (male) promjene u cijeni financijske imovine prate velike (male) promjene [4], [25]. Uobičajeni rezultat ARCH modela je visoka ustrajnost utjecaja šokova na uvjetnu varijancu. Ta ustrajnost se u većini slučajeva ne odražava u stvarnim financijskim podacima [28], [11]. Procjena vremenskih perioda karakteriziranih sa mnogo jakih promjena u volatilnosti, korištenjem statičkih modela, dovodi do istih koeficijenata za obje, "mirnu" i "volatilnu" fazu, što vjerojatno ne bi bilo prikladno. Rijetki događaji, kao što su slomovi tržišta, financijske krize, promjene u politici vlade, imaju jasan učinak na mnoge financijske nizove. Tijekom tih događaja, volatilnost takvog niza se značajno mijenja. Na primjer, Schwert [28] zabilježava da je volatilnost na tržištu dionica viša tijekom recesija. Iako efekti rijetkih događaja, kao što je slom tržišta, mogu biti privremeni, njihova jačina može imati vrlo važne posljedice na procjenu modela vremenskih nizova. Lamoreux i Lastrapes [23] tvrde da ponašanje uvjetne varijance blisko integrirajućem, može biti zbog prisustva strukturnih prekida, koji nisu uzeti u obzir standardnim ARCH modelima. Zaključuju kako uvođenje determinističkog pomaka u uvjetnoj varijanci dovodi do značajne redukcije u stupnju ustrajnosti utjecaja šokova.

Stoga je bila potrebna nova specifikacija, sa promjenama u režimu generirajućeg procesa. Nju je predstavio Hamilton [14]. Ideja iza tog tipa modela je ta da podatci, odnosno

proces koji generira vremenski niz, dolazi iz slučajne distribucije te je stoga, također, podložan promjenama. Primjer bi mogla biti velika depresija s početkom 1929. i kao posljedica slom tržišta dionica i povećana volatilnost. Čini se intuitivnim reći, kako je tijekom tih događaja male vjerojatnosti, vremenski niz (u ovom slučaju povrati na tržištu dionica) pratio drugačiji proces nego u mirnim periodima, to jest da se specifikaciji modela treba dozvoliti povremena promjena parametara procesa. Time dozvoljavamo da procjena definira različite periode različitih stanja i tako uzme u obzir mogućnost različitih generirajućih procesa.

Slijedeći Hamiltonov [14] rad o prebacivanju režima (*switching regimes*) i ideje Lamoureux i Lastrapesa [23], Cai[3] i Hamilton i Susmel[17], nezavisno, predlažu novi ARCH model: Switching ARCH tj. SWARCH model. Taj model realističnije obuhvaća značajke vremenskih nizova u dramatičnim ekonomskim događanjima, kao što je slom tržišta. SWARCH model je dizajniran da obuhvati promjene režima u volatilnosti pomoću neopažene varijable stanja koja prati Markovljev lanac prvog reda. To jest, parametrima u ARCH procesu dozvoljena je promjena u različitim stanjima. Volatilnost je postulirana kao promjenjiva u odnosu i na vrijeme i na stanje i pretpostavlja da su parametri ARCH modela ovisni o diskretnom broju režima, gdje se prebacivanje (switch) između režima odvija po Markovljevom lancu sa diskretnim skupom stanja.

Taj doprinos je utro put predstavljanju daljnjih modela i pokazao se kao katalizator za buduća istraživanja. Edwards i Susmel [9] proširili su originalni model na multivarijantni slučaj, dok je Susmel [30] generalizirao originalni SWARCH model predstavivši eksponencijalni SWARCH ili E-SWARCH. Hamilton i Susmel [17] primjenjuju SWARCH model na tržište dionica Sjedinjenih Država i pokazuju kako model, ne samo da pruža bolju prilagodbu podacima, nego i implicira niži stupanj ustrajnosti volatilnosti nego standardne specifikacije bez promjena u režimu. Nekoliko drugih studija, na primjer Li i Lin [24], Edwards i Susmel [8], Susmel [29], [30], Chen i Lin[5], Rachmand i Susmel [27], među ostalima, analiziraju volatilnost povrata dionica koristeći SWARCH pristup i dokumentiraju postojanje različitih režima volatilnosti. Colavecchio i Funke [6] modeliraju tjedne povrate azijskih forward tečajeva. Gray [12] proširuje SWARCH model na SW-GARCH.

U ovom radu, prezentirani su SWARCH modeli, s fokusom na SWARCH model razvijen od strane Hamiltona i Susmela [17], za koji je dan i prikaz procjene parametara i značajke modela te na temelju kojeg je i napravljen primjer upotrebe modela, naveden u ovom radu.

# Poglavlje 1

## Specifikacije modela

U ovom poglavlju ću predstaviti Hamiltonov [14] MRS model, kao prethodnika SWARCH modela, zatim SWARCH model Hamiltona i Susmela [17], Cai-a [3] te E-SWARCH Susmela [30] i multivarijantni SWARCH Edwardsa i Susmela [9], kao glavna proširenja osnovnog modela.

### 1.1 Markov Regime Switching model

Važna tehnika za analizu strukturnih prekida u finacijskim povratima je Hamiltonov [14] Markov Regime Switching model. U svom je radu Hamilton analizirao stopu rasta BDP-a Sjedinjenih Američkih Država. U Hamiltonovom modelu, procesu je dozvoljeno da se stohastički prebacuje između različitih režima. Također, režimi su upravljani Markovljevim lancem prvog reda.

U ovom odjeljku predstavljani su Markov regime switching Autoregressive (AR) modeli. Usredotočiti ćemo se na jednostavan slučaj: AR model sa autoregresijom prvog reda AR(1). Za slučaj općenitih AR( $p$ ) modela, procedura bi bila ista kao i za AR(1).

Neka je  $y_t$  povrat finacijskog niza. Hamiltonov [14] Markov regime switchig AR(1) model sa dva stanja je:

$$y_t - \mu_{s_t} = \varphi \cdot (y_{t-1} - \mu_{s_{t-1}}) + \varepsilon_t$$

gdje je  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{s_t}^2)$  i  $s_t = 1$  ako je proces u režimu 1 i  $s_t = 2$  ako je proces u režimu 2. Potpun opis zakona vjerojatnosti koji upravlja opaženim podacima zahtjeva vjerojatnosni model koji uzrokuje promjenu iz režima 1 u 2 i obratno. Najjednostavnija takva specifikacija je da je  $s_t$  realizacija Markovljevog lanca sa dva stanja sa

$$\mathbb{P}(s_t = j \mid s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = \mathbb{P}(s_t = j \mid s_{t-1} = i) = p_{ij}$$

Pretpostavljajući da ne opažamo  $s_t$ , nego samo kroz opaženo ponašanje od  $y_t$ , parametri potrebni da bi u potpunosti opisali zakon vjerojatnosti koji upravlja  $y_t$  su: varijanca gaussov-

skih inovacija  $\sigma^2$ , autoregresijski koeficijent  $\varphi$ , konstante  $\mu_1$  i  $\mu_2$  i prijelazne vjerojatnosti  $p_{11}$  i  $p_{22}$ . Hamilton [14] daje i algoritam za procjenu objekata od interesa. Kao što je istaknuto u Hamiltonu [14], najinovativniji aspekt Hamiltonovog switching modela je sposobnost za objektivno određivanje stanja ekonomije u vremenu. Hamiltonov model je uspješno primjenjivan na povrate dionica npr. u Pagan [25] i Schwert [28].

## 1.2 Markov Regime Switching ARCH modeli

Hamilton i Susmel [17] i Cai [3] nezavisno su predložili SWARCH model, kombinirajući MRS sa ARCH modelima. U tim modelima, svaki režim karakteriziran je drugačijim  $ARCH(q)$  procesom i parametri uvjetne varijance poprimaju različite vrijednosti za svaki od režima.

### SWARCH model Hamiltona i Susmela

U modelu Hamiltona i Susmela [17] promjena se nalazi u skali uvjetne varijance, kada prelazimo iz jednog režima u drugi. Neka je  $y_t$  vektor opaženih varijabli i neka  $s_t$  označava neopaženu slučajnu varijablu koja može poprimiti vrijednosti  $1, 2, \dots, K$ . Pretpostavimo da se  $s_t$  može opisati pomoću Markovljevog lanca,

$$\mathbb{P}(s_t = j \mid s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = \mathbb{P}(s_t = j \mid s_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (1.1)$$

za  $i, j = 1, 2, \dots, K$ . Ponekad je prikladno sakupiti prijelazne vjerojatnosti u  $(K \times K)$  matricu:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K1} & p_{K2} & \cdots & p_{KK} \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

Primjetimo da je suma svakog retka matrice  $\mathbf{P}$  jednaka 1. Svaki  $p_{ij}$  je vjerojatnost da stanje  $i$  prelazi u stanje  $j$ . Pod tim specifikacijama prijelazne vjerojatnosti  $p_{ij}$  su konstante. O varijabli  $s_t$  mislimo kao o varijabli stanja, ili režima u kojem se nalazi proces u trenutku  $t$ . Pod time se smatra da  $s_t$  upravlja parametrima uvjetne distribucije od  $y_t$ . Pretpostavimo da  $y_t$  prati autoregresivnu jednadžbu prvog reda. Dakle, neka je

$$y_t = \mu + \varphi \cdot y_{t-1} + u_t.$$

Prirodno proširenje Hamiltonovg pristupa na uvjetnu varijancu, bilo bi modeliranje reziduala  $u_t$  kao

$$u_t = \sqrt{g_{s_t}} \cdot \tilde{u}_t.$$



Ovdje pretpostavljamo da  $\tilde{u}_t$  prati standardni ARCH-L( $q$ ) proces

$$\tilde{u}_t = h_t \cdot v_t,$$

gdje su  $v_t$  nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem nula, dok  $h_t$  poštuje jednadžbu

$$h_t^2 = a_0 + a_1 \cdot \tilde{u}_{t-1}^2 + a_2 \cdot \tilde{u}_{t-2}^2 + \dots + a_q \cdot \tilde{u}_{t-q}^2 + \xi \cdot d_{t-1} \cdot \tilde{u}_{t-1}^2,$$

gdje je  $d_{t-1} = 1$  ako je  $\tilde{u}_{t-1} < 0$  i  $d_{t-1} = 0$  za  $\tilde{u}_{t-1} > 0$ . Inherentna ARCH-L( $q$ ) varijabla  $\tilde{u}_t$  je pomnožena s konstantom  $\sqrt{g_1}$  kada je proces u režimu predstavljenom sa  $s_t = 1$ , pomnožena sa  $\sqrt{g_2}$  kada je  $s_t = 2$ , i tako dalje. Faktor za prvo stanje  $g_1$  je normaliziran na jedinicu, dok su  $g_j > 1$  za  $j = 2, 3, \dots, K$ , i tada se  $g_j$  interpretiraju kao omjeri uvjetne varijance, kada se proces nalazi u režimu  $j$ , relativno na onu kada je proces u režimu 1. Ideja je, dakle, modelirati promjenu u režimu kao promjenu u skali procesa. Uvjetno na poznavanje trenutnog i prošlih režima, varijanca za rezidualne  $u_t$  je:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u_t^2 \mid s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q}, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-q}) \\ = g_{s_t} \cdot \left[ a_0 + a_1 \cdot (u_{t-1}^2 / g_{s_{t-1}}) + a_2 \cdot (u_{t-2}^2 / g_{s_{t-2}}) + \dots + a_q \cdot (u_{t-q}^2 / g_{s_{t-q}}) + \xi_{t-1} \cdot (u_{t-1}^2 / g_{s_{t-1}}) \right] \\ \equiv \sigma_t^2(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q}). \end{aligned}$$

U odsutnosti *leverage* efekta ( $\xi = 0$ ), reći ćemo da  $u_t$  prati Markov-switching ARCH proces  $q$ -tog reda sa  $K$  stanja, u oznaci  $u_t \sim \text{SWARCH}(K, q)$ . U prisutnosti *leverage* efekta ( $\xi \neq 0$ ), zvat ćemo ga SWARCH-L( $K, q$ ) specifikacijom. Dakle, zajedno sa vjerojatnostima  $p_{ij}$  (1.1) SWARCH( $K, q$ ) model Hamiltona i Susmela može se napisati kao:

$$y_t = \mu + \varphi \cdot y_{t-1} + u_t, \quad (1.2)$$

$$u_t = \tilde{u}_t \cdot \sqrt{g_{s_t}}, \quad (1.3)$$

$$\tilde{u}_t = v_t \cdot \sqrt{h_t}, \quad v_t \sim n.j.d.(0, 1), \quad (1.4)$$

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \cdot \tilde{u}_{t-i}^2, \quad (1.5)$$

odnosno za SWARCH-L( $K, q$ )

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \cdot \tilde{u}_{t-i}^2 + \xi \cdot d_{t-1} \cdot \tilde{u}_{t-1}^2, \quad (1.6)$$

gdje je  $d_{t-1} = 1$  ako je  $\tilde{u}_{t-1} < 0$  i  $d_{t-1} = 0$  za  $\tilde{u}_{t-1} > 0$ ,  $\xi > 0$ . Model u jednadžbama (1.2) - (1.5) implicitno pretpostavlja da uvjetna srednja vrijednost ne ovisi o  $s_t$ . Ta pretpostavka pojednostavnjuje procjenu i dozvoljava nam da se usredotočimo samo na vremensku varijabilnost procesa uvjetne varijance. Jednadžbe (1.3) - (1.5) opisuju SWARCH( $K, q$ ) model varijance. Parametri SWARCH modela se općenito procjenjuju metodom maksimalne vjerodostojnosti [14], [17] pod uvjetima:  $g_{s_1} = 1$ ,  $\sum_{i=1}^q p_i = 1$  i  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ . Poglavlje 2 opisuje algoritam kojim se izvrjednuje funkcija log-vjerodostojnosti uzorka.

## The Switching-AR( $K$ )-Markov-ARCH( $G$ ) model Caia

Cai [3] je predložio parametrizaciju sličnu SWARCH modelu i nazvao je The Switching AR( $K$ ) Markov ARCH( $G$ ) model. Cai postulira model za niz povrata  $r_t$ :

$$r_t = c_0 + c_1 \cdot S_t + z_t, \quad (1.7)$$

$$z_t = b_1 \cdot z_{t-1} + \dots + b_k \cdot z_{t-k} + \epsilon_t, \quad (1.8)$$

$$\epsilon_t = u_t \cdot \sqrt{h_t}, \quad u_t \sim n.j.d. \quad N(0, 1), \quad (1.9)$$

$$h_t = \gamma(S_t) + \sum_{i=1}^g a_i \cdot \epsilon_{t-i}^2, \quad a_i \geq 0, \quad (1.10)$$

gdje je

$$\gamma(S_t) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot S_t, \quad \gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0,$$

i  $z_t$  je devijacija od srednje vrijednosti režima  $c_0 + c_1 \cdot S_t$ , gdje  $S_t = 0$  ili  $1$  označava neopaženo stanje sustava. Latentna varijabla  $S_t$  po pretpostavci prati Markovljev proces prvog reda sa prijelaznim vjerojatnostima

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t = 0 \mid S_{t-1} = 0) &= p, \\ \mathbb{P}(S_t = 1 \mid S_{t-1} = 0) &= 1 - p, \\ \mathbb{P}(S_t = 1 \mid S_{t-1} = 1) &= q, \\ \mathbb{P}(S_t = 0 \mid S_{t-1} = 1) &= 1 - q, \end{aligned} \quad (1.11)$$

Stohastički proces za  $S_t$  je striktno stacionaran ako su oba  $p$  i  $q$  manji od jedinice i ne poprimaju vrijednost nula istovremeno [3].  $S_t$  poštuje AR(1) reprezentaciju:

$$S_t = (1 - p) + \eta \cdot S_{t-1} + V_t, \quad \eta = -1 + p + q. \quad (1.12)$$

Ta jednadžba je poseban slučaj standardnog AR(1) modela, sa neuobičajenim distribucijama vjerojatnosti inovacijskog niza ( $V_t$ ). Kao što je pokazano u Hamiltonu [14]  $\eta$  se može protumačiti kao mjera ustrajnosti u djelovanju procesa. Takva specifikacija dozvoljava strukturalne promjene i u srednjoj vrijednosti i u konstanti odsječka u ARCH specifikaciji. Za sustav kažemo da je u stanju niske varijance kada je  $S_t = 0$  i visoke varijance kada je  $S_t = 1$ . [3].

### 1.3 E-SWARCH

Susmel [30] proširuje SWARCH model po uzoru na E-GARCH. Promotrimo E-GARCH( $p, q$ ) proces za niz  $y_t$

$$y_t = f(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}) + e_t, \quad e_t \mid \boldsymbol{\Psi}_{t-1} \sim D(0, h_t), \quad (1.13)$$

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot \ln(h_{t-i}) + \sum_{i=1}^q g\left(\frac{e_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}}\right), \quad (1.14)$$

$$g\left(\frac{e_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}}\right) = \xi_t \cdot \frac{e_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} + \alpha_t \cdot \left(\frac{|e_{t-i}|}{\sqrt{h_{t-i}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right), \quad (1.15)$$

gdje se  $f(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})$  odnosi na uvjenu srednju vrijednost,  $\mathbf{x}_t$  je vektor od  $M$  objasnidbenih varijabli, koje mogu sadržavati prošle vrijednosti od  $y$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  je  $M \times 1$  vektor parametara,  $\boldsymbol{\Psi}_{t-1}$  informacijski skup koji sadrži sve informacije dostupne do vremena  $t - 1$  i  $e_t$  greška, koja prati, uvjetno na  $\boldsymbol{\Psi}_{t-1}$ , distribuciju  $D$  sa očekivanjem nula i varijancom  $h_t$  ovisnom o vremenu. Uvjetna varijanca,  $h_t$ , prati E-GARCH( $p, q$ ) proces kao što je dano jednadžbom (1.14). Prisjetimo se jednadžbe (1.5) uvjetne varijance u SWARCH( $K, q$ ) modelu

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \tilde{u}_{t-i}^2,$$

i zapišimo je kao

$$\frac{h_t}{g_{s_t}} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \frac{\tilde{u}_{t-i}^2}{g_{s_{t-i}}} + \frac{\xi}{g_{s_{t-1}}} \tilde{u}_{t-1}^2, \quad (1.16)$$

gdje je  $s_t$  neopažena slučajna varijabla opisana Markovljevim lancem prvog reda

$$\mathbb{P}(s_t = j \mid s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = \mathbb{P}(s_t = j \mid s_{t-1} = i) = p_{ij},$$

za  $i, j = 1, 2, \dots, K$ . Slično E-GARCH formulaciji, Susmel [30] zapisuje jednadžbu (1.16) kao

$$\ln(h_t) = \ln(g_{s_t}) + \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \frac{|\tilde{u}_{t-i}|}{g_{s_{t-i}}} + \xi \frac{\tilde{u}_{t-1}}{g_{s_{t-1}}}. \quad (1.17)$$

i taj model naziva E-SWARCH( $K, q$ )-L. Kao i u E-GARCH, nisu potrebni uvjeti nenegativnosti. U E-SWARCH( $K, q$ ) modelu uvjetna varijanca prati E-ARCH( $q$ ) proces, a ne E-GARCH( $p, q$ ), dakle E-SWARCH i E-GARCH nisu ugnježđeni. Štoviše, u ovoj E-SWARCH formulaciji autoregresivni članovi nisu standardizirani reziduali. Također, očito je da E-SWARCH model ima kraću memoriju, jer ne uključuje  $h_{t-1}$ .

U svom radu, Susmel je modelirao povrate na indekse tržišta dionica i koristio sljedeći model:

$$\begin{aligned} r_t &= a + br_{t-1} + e_t, & e_t \mid \Psi_{t-1} &\sim D(0, h_t), \\ \ln(h_t) &= \ln g_{s_t} + \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \frac{|e_{t-i}|}{g_{s_{t-i}}} + \xi \frac{e_{t-1}}{g_{s_{t-1}}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

sa parametrima  $K = 2, 3$  i  $q = 1, 2, 3$ . Pronašao je dokaze za prebacivanje volatilnosti za Kanadu, Sjedinjene Američke Države, Ujedinjeno Kraljevstvo i Japan. Također unutar SWARCH modela, ARCH efekti su značajno smanjeni. Međutim, *out-of-sample* prognoza varijance GARCH-t modela superornija je onoj SWARCH-a [30].

## 1.4 Multivarijantni SWARCH

Tijekom proteklih desetljeća, zbog sve veće integranosti financijskih tržišta i povećane mobilnosti kapitala, postavilo se pitanje prelijevanja financijskih nestabilnosti među zemljama. Posebna karakteristika druge polovice 1990.-ih godina bila je to što se činilo kako se financijska komešanja šire među zemljama koje nisu djelovale povezano. Nekoliko autora nazvalo je tu pojavu "zarazom" ( vidi Edwards [7] ).

Edwards i Susmel [9] proširuju SWARCH model na multivarijantni slučaj, kako bi provjerili teoriju "zaraze", odnosno da li se šokovi zaista ubrzano šire tržištima. Međutim, pokazalo se da je multivarijantni SWARCH model iznimno zahtjevan u smislu vremena računanja. To znači da ekonometričar mora napraviti izbor između broja volatilnih stanja i broja zemalja koje će uključiti u analizu. Edwards i Susmel zbog jednostavnosti, koriste bivarijantni model.

Pretpostavimo da imamo dva niza (države), sa dva režima volatilnosti. Dakle, u bivarijantnoj formulaciji, broj stanja je četiri:

$$\begin{aligned} s_t^* = 1: & \text{ niz 1 - niska volatilnost, niz 2 - niska volatilnost,} \\ s_t^* = 2: & \text{ niz 1 - niska volatilnost, niz 2 - visoka volatilnost,} \\ s_t^* = 3: & \text{ niz 1 - visoka volatilnost, niz 2 - niska volatilnost,} \\ s_t^* = 4: & \text{ niz 1 - visoka volatilnost, niz 2 - visoka volatilnost,} \end{aligned}$$

Sustav se može zapisati kao:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{r}_{t-1} + \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_t \mid I_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t), \quad (1.19)$$

$$h_t / \gamma_{s_t} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 / \gamma_{s_{t-i}} \quad s_t = 1, 2, \dots, K, \quad (1.20)$$

gdje je, u bivarijantnom slučaju,  $\mathbf{r}_t = [r_{t1}, r_{t2}] 2 \times 1$  vektor povrata,  $\mathbf{e}_t = [\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}] 2 \times 1$  vektor grešaka, koji dolaze iz bivarijantne normalne distribucije s očekivanjem nula i uvjetnom kovarijacijskom matricom  $\mathbf{H}_t$  ovisnom o vremenu. Uvjetna kovarijacijska matrica  $\mathbf{H}_t$  je konstantna korelacijska matrica čiji dijagonalni elementi prate SWARCH proces. Dozvoljavamo da su korelacijski koeficijenti ovisni o stanju, tj. dozvoljavamo da se korelacijski koeficijenti mijenjaju sa stanjima volatilnosti zemlje pokretača.  $\mathbf{A} = [a_1, a_2]$  i  $\mathbf{B} = [b_1, b_2]$  su  $2 \times 1$  vektori. Kao i u univarijantnom slučaju, zakon vjerojatnosti koji uzrokuje promjenu stanja je dan sa Markovljevim lancem sa  $K^* = 4$  stanja s prijelaznim vjerojatnostima  $\mathbb{P}(s_t^* = j \mid s_{t-1}^* = i) = p_{ij}^*$ . Za model s četiri stanja, neki od  $p_{ij}^*$  mogu biti blizu nule pa u svrhu konvergencije te parametre tretiramo kao dane i jednake nuli. To reducira broj parametara za procijeniti. Hamilton i Lin [16] kažu kako  $p_{ij}^*$  mogu biti restringirani kako bi odgovarali različitim pretpostavkama o stanjima volatilnosti. Na primjer, usredotočimo se na  $p_{24}^*$ . Ukoliko su stanja u dvije zemlje nezavisna, tada je  $p_{24}^* = p_{12}^{r1} \cdot p_{22}^{r2}$ . S druge strane, ako zemlje dijele stanje volatilnosti (pretpostavljamo zavisnost), tada je  $p_{24}^* = 0$ .

Analiza se provodi u tri koraka. Prvo procijenimo nerestringirani model, zajedno sa *smoothed* vjerojatnostima za četiri stanja  $s_t^* = j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). Zanima nas jesu li parovi zemalja zajedno u "visoko - visoko" volatilnom stanju. U drugom koraku formalno testiramo jesu li volatilna stanja nezavisna u parovima zemalja. I treće, za one slučajeve gdje je nulta hipoteza o nezavisnosti odbačena, testiramo da li, kada je zemlja pokretač u visoko volatilnom stanju i zemlja nasljednik je u visoko volatilnom stanju. To je dobar test sinkronizacije volatilnosti.

Kako bi testirali hipotezu o nezavisnosti stanja, prvo procijenimo bivarijantni SWARCH model bez restrikcija na matricu  $\mathbf{P}^*$ . Neka je funkcija log-vjerodostojnosti nerestringiranog modela označena  $L(H_A)$ . Također procjenjujemo model namećući restrikcije na matricu prijelaznih vjerojatnosti,  $\mathbf{P}^*$ , sa elementima kao što je  $p_{14}^* = p_{12}^{r1} p_{12}^{r2}$ . Neka je  $L(H_0)$  funkcija log-vjerodostojnosti restringiranog modela. Tada možemo izračunati  $LR = -2 \cdot (L(H_0) - L(H_A))$ . Pod nultom hipotezom, test ima  $\chi^2$  distribuciju sa  $k$  stupnjeva slobode, gdje je  $k$  broj dodatnih parametara procenjen pod alternativnom hipotezom.

## Poglavlje 2

# Procjena SWARCH modela

Procjena  $\text{SWARCH}(K, q)$  modela Hamiltona i Susmela radi se korištenjem MLE pristupa [14], [17], pod uvjetima:  $g_{s_1} = 1$ ,  $\sum_{i=1}^K p_i = 1$  i  $0 \leq p_{ij} \leq 1$   $i, j = 1, \dots, K$ . Detaljnija diskusija o tehnici može se pronaći u [14], [17], [22].

### 2.1 Opis algoritma

Hamilton i Susmel [17] izvode potrebnu proceduru za dobivanje funkcije log-vjerodostojnosti za  $\text{SWARCH}(K, q)$  specifikaciju. Procedura se temelji na iterativnom postupku. Proces filtriranja prima određene inpute i dolazi do određenih outputa, koji su inputi za slijedeći korak iteracije. Input u bazni filter je zajednička uvjetna vjerojatnost

$$\mathbb{P}(s_{t-1}, s_{t-2}, \dots, s_{t-q} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{-q+1}), \quad (2.1)$$

što dovodi do outputa

$$\mathbb{P}(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{-q+1}), \quad (2.2)$$

korištenjem procedure objašnjene ispod. Jednadžba (2.2) se tada može upotrijebiti kao input za idući korak. Nusprodukt tog postupka je uvjetna vjerodostojnost:

$$f(y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{-q+1}). \quad (2.3)$$

Postoji  $K^{q+1}$  različitih vjerojatnosti, kao jednadžba (2.2), koje predstavljaju sve kombinacije moguće za  $q$  posljednjih neopaženih stanja procesa, temeljeno na opaženom vremenskom nizu  $y$ . Da bi stigli do inputa za slijedeću iteraciju, pratimo algoritam oblika:

Korak 1: Izračunaj

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{-q+1}) \\ &= \mathbb{P}(s_t \mid s_{t-1}) \cdot \mathbb{P}(s_{t-1}, s_{t-2}, \dots, s_{t-q} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{-q+1}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdje je prvi dio ove jednadžbe dan jednadžbom (1.1), što su samo različite prijelazne vjerojatnosti implicirane Markovljevim lancem, što vodi na  $K^{q+2}$  različitih brojeva, koji su svaki ponovno pomnoženi sa pretpostavljenom uvjetnom gustoćom od  $y_t$  i  $(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q})$ . To nas dovodi do:

Korak 2:

$$\begin{aligned} & f(y_t, s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q+1}) \\ &= f(y_t \mid s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q}, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q+1}) \cdot \mathbb{P}(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q+1}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ovdje se može pretpostaviti da  $f(y_t \mid s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q}, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q+1})$  prati normalnu, Studentovu-t, ili neku drugu distribuciju, što mijenja ovu funkciju u skladu s time što je pretpostavljeno.

Korak 3: Zbroji svih  $K^{q+2}$  brojeva, danih s (2.5), kako bi dobio uvjetnu gustoću danu sa jednadžbom (2.3),

$$f(y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q+1}) = \sum_{s_t=1}^K \sum_{s_{t-1}=1}^K \cdots \sum_{s_{t-q}=1}^K f(y_t, s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q+1}). \quad (2.6)$$

Iz te jednadžbe može se odrediti funkcija uvjetne log-vjerodostojnosti uzorka, koja je jednaka

$$L = \sum_{t=1}^T \ln f(y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_0), \quad (2.7)$$

i može se maksimizirati s obzirom na nepoznate populacijske parametre  $\alpha, \phi, a_0, a_1, \dots, a_q, p_{11}, p_{12}, \dots, p_{KK}, g_1, g_2, \dots, g_K, \nu$ , pod uvjetima  $g_1 = 1, \sum_{j=1}^K p_{ij} = 1$ , za  $i = 1, 2, \dots, K$ , i  $0 \leq p_{ij} \leq 1$  za  $i, j = 1, 2, \dots, K$ . Za svaku moguću kombinaciju  $s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}$  u jednadžbi (2.5), ti brojevi se mogu sumirati po  $K$  mogućih vrijednosti za  $s_{t-q}$  rezultat se tada može podijeliti sa (2.6), kako bi se ponovo dobilo  $K^{q+1}$  različitih vrijednosti u jednadžbi (2.4), kao outputi koji se koriste kao inputi za slijedeću iteraciju. Dakle,

Korak 4:

$$\mathbb{P}(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q+1}) = \frac{\sum_{s_{t-q}=1}^K f(y_t, s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q+1})}{f(y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q+1})} \quad (2.8)$$

Dakle, procedura koja započinje korakom 1 može ponovo početi sa inputom, koji je output koraka 4, samo jedan period dalje. Iteracije trebaju započeti sa inputom

$$\mathbb{P}(s_0, s_{-1}, \dots, s_{-q} \mid y_0, y_{-1}, \dots, y_{-q})$$

postavljenim tako da budu jednake ergodskim vjerojatnostima impliciranim Markovljevim lancem, kao što je opisano u jednadžbi (22.2.26) u [15].

Nusprodukt ove procedure procjene su izrazi za vjerojatnosti o pojedinom stanju u kojima se proces nalazio u vremenu  $t$ . Jedan od njih je takozvana "filter probability",  $\mathbb{P}(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q} \mid y_t, y_{t-1}, \dots, y_0)$ , koja je uvjetovana observacijama  $y$  do vremena  $t$  i rezultira sa  $K^{q+1}$  vrijednosti za raličite vjerojatnosti, koje u sumi daju jedan po konstrukciji. One označavaju uvjetnu vjerojatnost da je u vremenu  $t$  stanje bilo  $s_t$ , u vremenu  $t - 1$ , stanje bilo  $s_{t-1}$ , ..., u vremenu  $t - q$  stanje bilo  $s_{t-q}$ . Ukoliko se koristi puni uzorak, dakle od  $y_0$  do  $y_T$ , mogu se konstruirati takozvane "smoothed probabilities", koje izražavaju vjerojatnosti o stanju u vremenu  $t$  s obzirom na podatke dostupne u čitavom uzorku,  $\mathbb{P}(s_t \mid y_T, y_{T-1}, \dots, y_0)$ . Taj izraz daje  $K$  raličitih brojeva za svako vrijeme  $t$ , koji u zbroju daju jedan. Dakle, one predstavljaju *ex-post* procjene vjerojatnosti o stanju u vremenu  $t$ , s obzirom na cijeli vremenski niz. Prema Hamiltonu [14] observacija  $y_t$  pripada stanju  $s_i$  ako je "smoothed probability" veća od 0.5. Još jedna zanimljiva implikacija unutar Markovljevog okvira specifikacije modela je da se iz procenjenih parametara, dobivenih maksimalnom vjerodostojnošću, može izračunati očekivano trajanje pojedinog stanja i usporediti sa povijesnim prosjekom. Očekivano zadržavanje procesa u pojedinom stanju računa se kao  $d_i = (1 - p_{ii})^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$  [14].

Navedena metodologija je programirana u matematičko analitičkom programu GAUSS. Čitava sintaksa procedure dostupna je na web stranici R. Susmela, <http://www.bauer.uh.edu/rsusmel/cbapage.html>. Procedure za Hamiltonov MRS model, kao i za bivarijantni SWARCH, također su dostupne na navedenoj stranici.

## 2.2 Testiranje adekvatnosti modela

Prati li zaista neki niz podataka SWARCH model? Primjetimo da je npr. Student t-ARCH-L(2) ugnježđen u Student t-SWARCH-L( $K, 2$ ) za  $K = 1$ . Uobičajeni test omjera vjerodostojnosti nemože se egzaktno primjeniti. Naime, uobičajena teorija o asimptotskoj  $\chi^2$  distribuciji ne vrijedi zbog parametara  $p_{ij}$ , koji nisu određeni pod nultom hipotezom,  $K = 1$  ( $g_1 = g_2$ ). Zbog tog razloga, standardni testovi omjera vjerodostojnosti nisu prikladni i mogu poslužiti samo za grubu procjenu. Hansen [18], [19] je predložio asimptotski valjani test, koji je u stanju pružiti gornju granicu za asimptotsku distribuciju standardiziranoga testa omjera vjerodostojnosti, čak i kada su uvjeti regularnosti narušeni (kao što su neodređeni parametri), ali u praksi ispada numerički vrlo zahtjevan i dugotrajan te je zbog toga ograničena njegova upotrebljivost [8].

Kako bi zaobišao problem neodređenih parametara pod nultom hipotezom, Hansen definira funkciju  $q_t(\zeta) = L_t[\zeta, \lambda(\zeta)] - L_t[\zeta_0, \lambda(\zeta_0)]$ , gdje  $L_t[\zeta, \lambda(\zeta)]$  predstavlja uvjetnu log-vjerodostojnost  $t$ -te observacije izvrednjene u  $\zeta$  i  $\lambda(\zeta)$ . Parametri  $\zeta$  i  $\lambda$  predstavljaju particiju parametarskog prostora  $Z$ . Za slučaj s dva stanja  $\zeta = (p_{11}, p_{12}, g_2)$ , pod nultom



hipotezom je  $\zeta = \zeta_0 = (1, 0, 1)$ . Hansen predlaže slijedeći standardizirani test

$$LR = \max_{\zeta \in Z} T \cdot \frac{mq(\zeta)}{[\sum_t (q_t(\zeta) - mq(\zeta))^2]^{\frac{1}{2}}}$$

gdje je  $mq$  očekivanje od  $q_t$ . Hansen je pokazao da, ako je nulta hipoteza istinita, tada za velike uzorke, vjerojatnost da  $LR$  premašuje kritičnu vrijednost  $z$ , manja je nego vjerojatnost da Monte Carlo simulacija statistike premaši tu istu vrijednost  $z$ .

Hamilton i Susmel [17], svjesni problema pri odabiru parametara  $K$  i  $q$ , koriste procjenu na temelju omjera vjerodostojnosti, Akaike i Schwarzovom kriteriju i odbacuju nultu hipotezu kada konvencionalni testovi jako premaše standardne kritične vrijednosti.

## 2.3 Prognoze

Da bi izračunali  $m$  perioda unaprijed prognozu za  $u_{t+m}^2$ , promotrimo hipotetsku situaciju u kojoj su nam sa sigurnošću poznate vrijednosti  $s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}$ , što znači da također sa sigurnošću znamo vrijednosti  $\tilde{u}_\tau = u_\tau / \sqrt{g_{s_\tau}}$ , za  $\tau = t, t-1, \dots, t-q+1$ . Za taj informacijski skup prognoza  $u_{t+m}^2$  bila bi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(u_{t+m}^2 \mid s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\ &= \mathbb{E}(g_{s_{t+m}} \cdot \tilde{u}_{t+m}^2 \mid s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\ &= \mathbb{E}(g_{s_{t+m}} \mid s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}) \cdot \mathbb{E}(\tilde{u}_{t+m}^2 \mid \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdje je zadnja jednakost izvedena iz činjenice da je  $s_t$  nezavisno o  $v_t$  i  $\tilde{u}_t$  za svako  $t$  i  $\tau$ . Budući da  $s_t$  prati Markovljev lanac, prvi član u (2.9) dan je sa

$$\mathbb{E}(g_{s_{t+m}} \mid s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}) = \sum_{j=1}^K g_j \cdot \mathbb{P}(s_{t+m} = j \mid s_t) \quad (2.10)$$

Prijelazne vjerojatnosti za  $m$  perioda unaprijed mogu se izračunati množenjem matrice (iz modela) same sa sobom  $m$  puta:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}(s_{t+m} = 1 \mid s_t = 1) & \mathbb{P}(s_{t+m} = 1 \mid s_t = 2) & \cdots & \mathbb{P}(s_{t+m} = 1 \mid s_t = K) \\ \mathbb{P}(s_{t+m} = 2 \mid s_t = 1) & \mathbb{P}(s_{t+m} = 2 \mid s_t = 2) & \cdots & \mathbb{P}(s_{t+m} = 2 \mid s_t = K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{P}(s_{t+m} = K \mid s_t = 1) & \mathbb{P}(s_{t+m} = K \mid s_t = 2) & \cdots & \mathbb{P}(s_{t+m} = K \mid s_t = K) \end{bmatrix} = \mathbf{P}^m$$

Stoga, ako su faktori stanja sakupljeni u  $(1 \times K)$  vektor  $\mathbf{g}' \equiv [g_1, g_2, \dots, g_K]$  tada je očekivanje  $\mathbb{E}(g_{s_{t+m}} \mid s_t = i) = \mathbf{g}' \mathbf{P}^m \mathbf{e}_i$ , gdje  $\mathbf{e}_i$  označava  $i$ -ti jedinični vektor stupac. Drugi član u

(2.9) jednostavno za konstruirati iz činjenice da  $\tilde{u}_t$  prati standardni ARCH-L( $q$ ) proces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{u}_{t+m}^2 \mid \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\ &= a_0 + a_1 \cdot \tilde{u}_t^2 + a_2 \cdot \tilde{u}_{t-1}^2 + \dots + a_q \cdot \tilde{u}_{t-q+1}^2 + \xi \cdot d_t \cdot \tilde{u}_t^2 \quad \text{za } m = 1, \\ &= a_0 + (a_1 + \xi/2) \cdot \tilde{h}_{t+m-1|t}^2 + a_2 \cdot \tilde{h}_{t+m-2|t}^2 + \dots + a_q \cdot \tilde{h}_{t+m-q|t}^2 \quad \text{za } m \geq 2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdje je  $\tilde{h}_{\tau|t}^2 = \tilde{u}_\tau^2$  za  $\tau \leq t$ , odnosno  $\tilde{h}_{\tau|t}^2 = \mathbb{E}(\tilde{u}_\tau^2 \mid \tilde{u}_t^2, \tilde{u}_{t-1}^2, \dots)$  za  $\tau > t$ . Niz  $(\tilde{h}_{\tau|t}^2)$  za  $\tau = t+2, t+3, \dots$ , se tada računa iterirajući (2.11). Sjetimo se da je  $\tilde{u}_t = u_t / \sqrt{g_{s_t}}$ . Prognoza u (2.11) je funkcija od  $u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-q+1}$  i određenog skupa vrijednosti za  $s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}$  za koje smo pretpostavili

$$\mathbb{E}(\tilde{u}_{t+m}^2 \mid \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) = \tilde{h}_{t+m|t}^2(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-q+1}).$$

Stoga se prognoza u (2.9) može napisati kao

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u_{t+m}^2 \mid s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \\ = (\mathbf{g}' \mathbf{P} \mathbf{e}_{s_t}) \cdot \tilde{h}_{t+m|t}^2(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-q+1}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Za dane vrijednosti  $u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-q+1}$ , izraz (2.12) opisuje različite prognoze za  $u_{t+m}^2$  za sve moguće kombinacije  $s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}$ , što možemo zapisati kao

$$\mathbb{E}(u_{t+m}^2 \mid s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-q+1}) \equiv \kappa(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-q+1}). \quad (2.13)$$

U stvarnosti, neznamo vrijednosti  $s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}$ . Međutim, iteriranjem očekivanja slijedi

$$\begin{aligned} \sigma_{t+m|t}^2 &= \mathbb{E}(u_{t+m}^2 \mid u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-q+1}) \\ &= \sum_{s_t=1}^K \sum_{s_{t-1}=1}^K \dots \sum_{s_{t-q+1}=1}^K [\kappa(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1}, u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-q+1}) \\ &\quad \cdot \mathbb{P}(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-q+1} \mid y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-q})]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

To jest, pojednostavnjujemo težinu svake uvjetne prognoze u (2.12) pomoću "filter" vjerojatnosti te posebne kombinacije, da bi izračunali prognozu  $m$  perioda unaprijed za  $\tilde{u}_{t+m}^2$  s obzirom na stvarne opažene podatke.

## 2.4 Ustrajnost ARCH komponente

Na kraju, komentirajmo karakterizaciju ustrajnosti ARCH komponente SWARCH procesa. Iz (2.11) prognoza za  $\tilde{u}_{t+m}^2$  prati diferencijsku jednadžbu  $q$ -tog reda, za  $m \geq 2$ :

$$\tilde{h}_{t+m|t}^2 = a_0 + (a_1 + \xi/2) \cdot \tilde{h}_{t+m-1|t}^2 + a_2 \cdot \tilde{h}_{t+m-2|t}^2 + \cdots + a_q \cdot \tilde{h}_{t+m-q|t}^2$$

Poznato je da je rješenje te diferencijske jednadžbe oblika

$$\tilde{h}_{t+m|t}^2 = c_0 + c_1 \cdot \lambda_1^m + c_2 \cdot \lambda_2^m + \cdots + c_q \cdot \lambda_q^m,$$

gdje su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  svojstvene vrijednosti matrice

$$\begin{bmatrix} (a_1 + \xi/2) & a_2 & \cdots & a_{q-1} & a_q \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Najveća svojstvena vrijednost te matrice je mjera ustrajnosti ARCH komponente SWARCH-L( $K, q$ ) procesa [17].

## Poglavlje 3

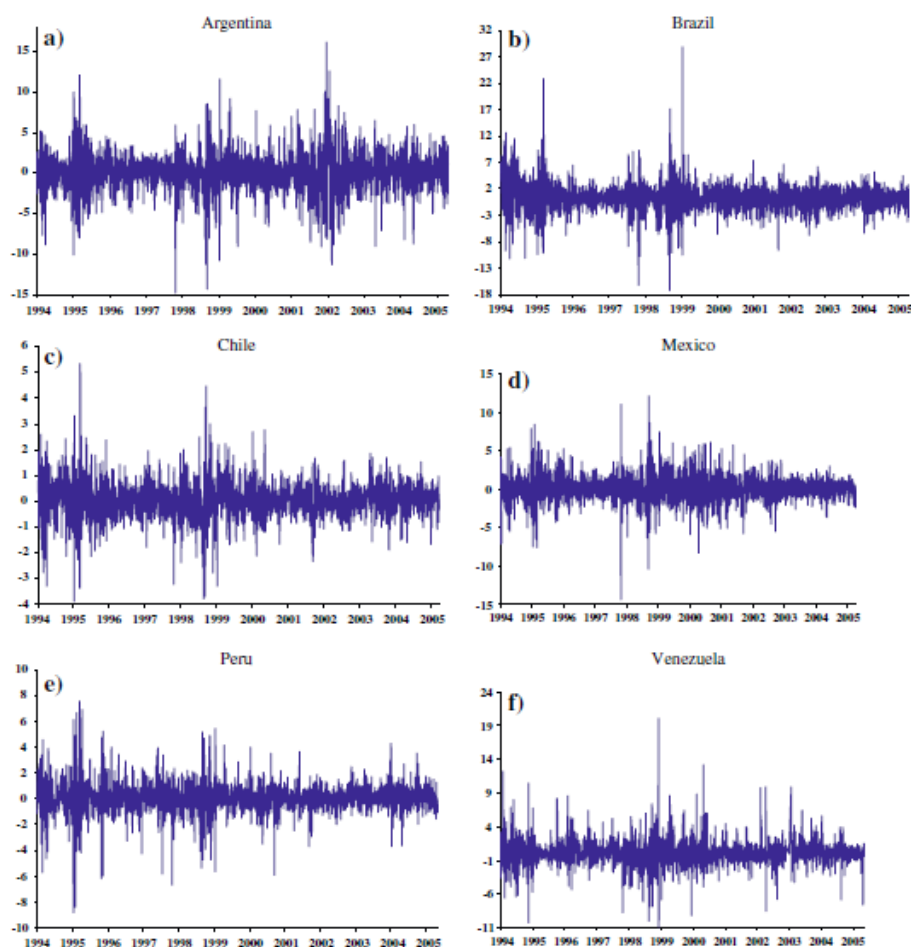
### Primjer

Kao primjer upotrebe  $SWARCH(K, q)$  modela Hamiltona i Susmela, preuzeo sam rad Giorgia Canarella i Stephena K. Pollarda [4]. Oni su iskoristili  $SWARCH$  model kako bi dokumentirali prisustvo visoko volatilnih režima u šest Latinoameričkih zemalja (Argentini, Brazilu, Čileu, Meksiku, Peruu i Venecueli), od početka siječnja 1994. do kraja travnja 2005. Pronašli su četiri visoko volatilne epizode, svaka od kojih je povezana bilo sa lokalnim (meksička kriza pesosa 1994., brazilska valutna kriza 1998.-1999., argentinska dužnička kriza 2001.-2002.) ili svjetskim financijskim krizama (azijska financijska kriza 1997.). Također, zaključili su kako su efekti svake od financijskih kriza kratkog životnog vijeka i između dva i četiri mjeseca nakon svake krize, sva tržišta se vraćaju u režim niske volatilnosti.

U svom istraživanju, Canarella i Pollard došli su do tri važna rezultata. Prvo, povrati na tržištima dionica, u Latinskoj Americi, mogu se primjereno karakterizirati  $SWARCH$  modelom. Drugo, efekti  $ARCH$  modela, to jest tendencija grupiranja volatilnosti, su mnogo manji jednom kada se ugrade strukturne promjene u model, čime su pružili dodatnu potporu argumentu Lamoureuxa i Lastrapesa [23]. Treće, pokazali su da su prebacivanja iz niske u visoku volatilnost uvelike potaknuta pojavom financijskih kriza.

#### 3.1 Model i podaci

U svom radu Canarella i Pollard pretpostavljaju dva stanja ( $K = 2$ ), stanje niske i stanje visoke volatilnosti. Indeksi nacionalnih tržišta dionica korišteni u radu su argentinski Merval indeks, brazilski BOVESPA indeks, čileanski IPGA indeks, meksički IPC indeks, peruanski IGBLV indeks i venecuelanski IBVC indeks. Promatrani su dnevni podaci u periodu 3.1.1994. do 29.4.2005. Svaki povrat na indeks računat je kao 100 puta razlika



Slika 3.1: Povrati indeksa po zemljama 1994.-2005.

logaritama nacionalnih indeksa dionica  $r_t = 100 \cdot (\ln p_t - \ln p_{t-1})$ . Slika 3.1 prikazuje povrate indeksa za svaku od promatranih zemalja. Očita je jaka tendencija grupiranja volatilnosti. Također se može primjetiti visoka volatilnost u povratima tijekom meksičke krize 1994. i brazilske krize 1998.-1999., ne samo kao lokalna pojava u Meksiku i Brazilu, već se pojavljuje u svih šest zemalja. S druge strane, povećana volatilnost u povratima tijekom argentinske krize 2001. ograničena je na Argentinu i ne širi se na preostalih pet zemalja.

Slika 3.2 prezentira neke statistike za svaki od nizova povrata indeksa. Najviši povrati su u Brazilu 0.149% i Venecueli 0.117%, a najniži u Argentini 0.028% i Čileu 0.029%. Brazil i Argentina imaju najvišu razinu prosječne dnevne volatilnosti (mjereno standardnom devijacijom) od 2.675 i 2.390%. Čile i Peru su namanje volatilna tržišta tijekom pe-

	Argentina	Brazil	Chile	Mexico	Peru	Venezuela
Mean	0.0289	0.1492	0.0297	0.0563	0.0507	0.1179
SD	2.3908	2.6752	0.7445	1.7142	1.1945	1.9545
Skewness	-0.1108	0.5651	0.1657	0.0128	-0.1122	0.8919
Kurtosis	4.4192	10.0147	4.3755	5.7101	6.7726	11.5745
JB	2,293.97	11,854.27	2,271.28	3,844.74	5,376.22	15,566.54
LB(12)	48.64	77.92	379.79	39.12	181.91	149.73
LB <sup>2</sup> (12)	1,059.17	654.54	1,370.32	558.79	826.69	742.84
Obs.	2,812	2,801	2,831	2,830	2,810	2,724

Slika 3.2: Neke statistike povrata indeksa po zemljama 1994.-2005.

rioda analize, sa standardnom devijacijom od 0.744 i 1.194%. Svi nizovi pokazuju tipičnu ne-normalnost financijskih vremenskih nizova, kao što je indicirano Jarque-Bera testom. Ljung-Box statistika primjenjena na povrate, otkriva značajnu autokorelaciju na svih šest tržišta, dok Ljung-Box statistika primjenjena na kvadrate povrata, otkriva prisutnost ne-linearne zavisnosti u svim nizovima, što pruža dokaz za ARCH tip procesa za uvjetnu varijancu.

Za svako od tržišta korišten je i procjenjen AR(1)-SWARCH(2, 4) model, korištenjem dvije alternativne specifikacije za uvjetnu grešku: normalne distribucije i Studentove t-distribucije.

## 3.2 Rezultati

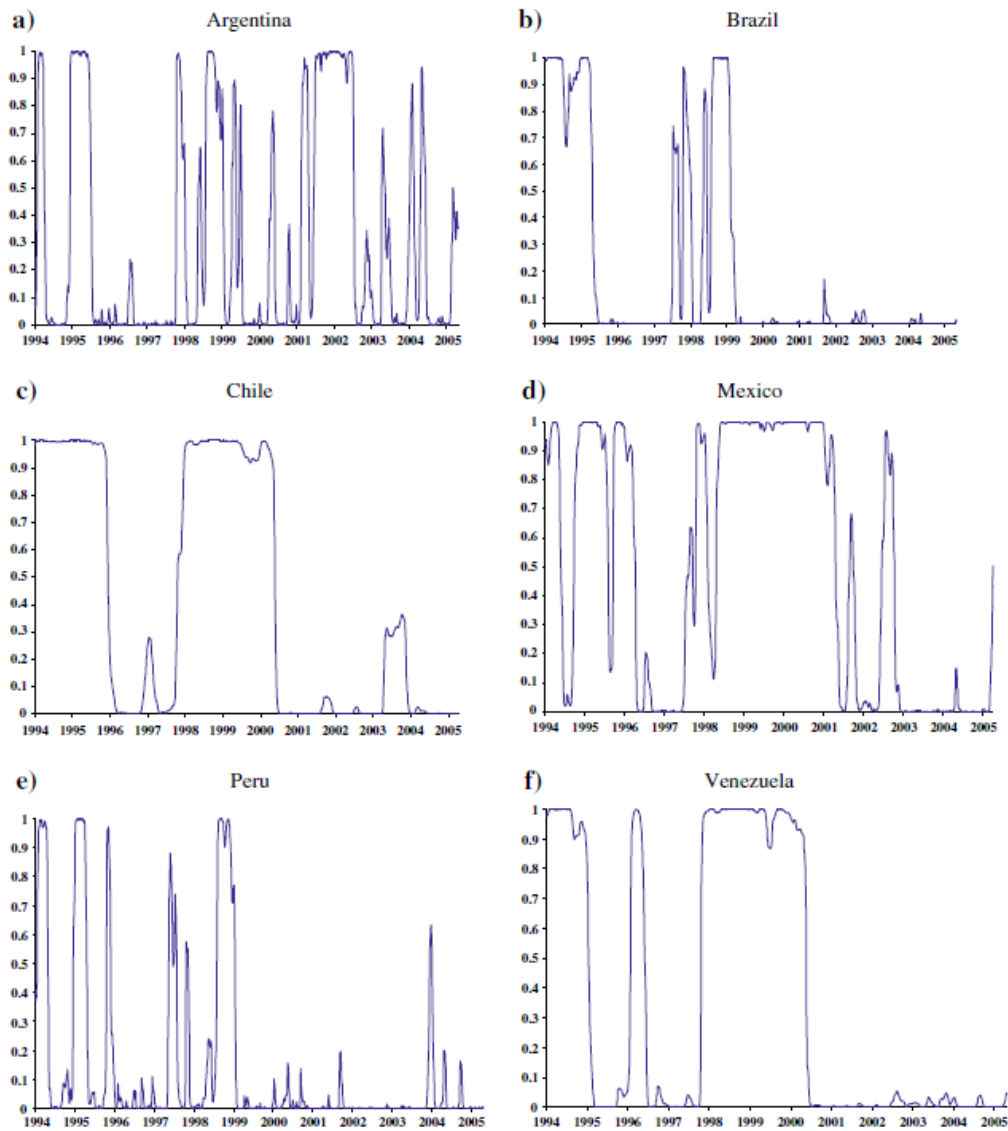
Navedimo nekoliko rezultata. Prvo, povrati u svim zemljama odražavaju značajnu pozitivnu autokorelaciju. Procjenitelji autoregresivnog koeficijenta prvog reda u AR(1)-SWARCH(2,4)-t modelu ne razlikuju se uvelike od onih dobivenih AR(1)-SWARCH(2,4)-N modelom i kreću se od visokih 0.326 (Peru), do niskih 0.064 (Brazil). U usporedbi sa zrelim tržištima kao što je ono Sjedinjenih Država i Japana, procjene za autoregresivni koeficijent prvog reda je uglavnom viši [20] i sugerira da je primjetna količina povrata na tržištu dionica Latinske Amerike predvidiva. Drugo, s obzirom na vrijednost funkcije vjerodostojnosti, model sa Studentovom t-distribucijom je superiorniji onom sa normalnom distribucijom grešaka. Treće, procjenjeni faktor varijance  $g_2$  je statistički signifikantan na svim tržištima. Pod t-modelom, visokovolatilno stanje 2 je 4.6 puta veličine nisko volatilnog stanja 1 u Argentini, 5.4 puta u Brazilu, 2.8 puta u Čileu, 3.6 puta u Meksiku, 6.1 puta u Peru i 3.8 puta u Venecueli (vidi Sliku 3.3). Pod normalnom distribucijom, 5.4 puta u Argentini, 7.9 puta u Brazilu, 3.9 puta u Čileu, 4.6 puta u Meksiku, 9.2 puta u Peru

i 9.9 puta u Venecueli.

	Argentina	Brazil	Chile	Mexico	Peru	Venezuela
$\mu$	0.098 (0.0334)	0.154 (0.0372)	0.017 (0.0105)	0.075 (0.0241)	0.032 (0.0159)	0.033 (0.0230)
$\varphi$	0.082 (0.0195)	0.064 (0.0199)	0.326 (0.0187)	0.130 (0.0197)	0.222 (0.0198)	0.210 (0.0199)
$\kappa$	6.512 (1.0206)	12.493 (2.4030)	12.594 (2.6816)	7.468 (1.0734)	6.650 (0.8799)	3.950 (0.3159)
$\alpha_0$	1.964 (0.1407)	2.151 (0.1518)	0.148 (0.0120)	0.856 (0.0712)	0.473 (0.0349)	1.001 (0.0968)
$\alpha_1$	0.072 (0.0279)	0.081 (0.0257)	0.176 (0.0301)	0.123 (0.0303)	0.158 (0.0352)	0.250 (0.0458)
$\alpha_2$	0.104 (0.0326)	0.098 (0.0290)	0.126 (0.0265)	0.070 (0.0257)	0.139 (0.0334)	0.216 (0.0455)
$\alpha_3$	0.060 (0.0268)	0.126 (0.0306)	0.058 (0.0258)	0.072 (0.0240)	0.066 (0.0298)	0.065 (0.0287)
$\alpha_4$	0.036 (0.0236)	0.095 (0.0309)	0.082 (0.0270)	0.013 (0.0194)	0.036 (0.0254)	-0.008 (0.0123)
$p_{11}$	0.991 (0.0032)	0.997 (0.0014)	0.998 (0.0010)	0.993 (0.0027)	0.995 (0.0021)	0.997 (0.0011)
$p_{12}$	0.009 (0.0032)	0.003 (0.0014)	0.002 (0.0010)	0.007 (0.0027)	0.005 (0.0021)	0.003 (0.0011)
$p_{21}$	0.020 (0.0068)	0.009 (0.0046)	0.002 (0.0014)	0.006 (0.0024)	0.025 (0.0105)	0.003 (0.0018)
$p_{22}$	0.980 (0.0068)	0.991 (0.0046)	0.998 (0.0014)	0.994 (0.0024)	0.975 (0.0105)	0.997 (0.0018)
$g_2$	4.659 (0.5031)	5.427 (0.5965)	2.799 (0.2714)	3.624 (0.3283)	6.074 (0.8957)	3.835 (0.4321)
logL	-5,986.70	-6,163.98	-2,640.91	-5,098.49	3,870.20	-4,953.20

Slika 3.3: Procjene parametara za SWARCH(2, 4)-t model; Procjenjene standardne greške u zagradama pored procijenjenih koeficijenata;  $\kappa$  je broj stupnjeva slobode Studentove t distribucije

U oba slučaja, veličina procjenjenog naglašava potrebu za modelom uvjetne varijance koji dozvoljava stohastička prebacivanja. Nulta hipoteza da su ti koeficijenti jednaki jedan, odbačena je u svim slučajevima, neovisno o distribuciji greške. Četvrto, procjenjene prijelazne vjerojatnosti su jako blizu jedinice što implicira da su stanja ustrajna (perzistentna). Za svako tržište, očekivana duljina trajanja stanja može se, kako je ranije navedeno, izračunati kao  $(1 - p_{ii})^{-1}$  za  $i = 1$  ili  $2$  [15]. S obzirom na procjenu, može se očekivati da će visoko volatilno stanje trajati, u prosjeku, 49 dana u Argentini, 106 dana u Brazilu, 445 dana u Čileu, 165 dana u Meksiku, 39 dana u Peruu i 291 dan u Venecueli. Iako se to može činiti mnogo, treba se sagledati u kontekstu velikog broja observacija i vremena iz kojih su te observacije preuzete. Također je naglašao da su van dijagonalne prijelazne vjerojatnosti statistički signifikantne te visoka ustrajnost ne sprečava eventualno prebacivanje režima. I napokon, iako su stanja ustrajna, procijenjeni ARCH parametri u AR(1)-SWARCH(2, 4)-t modelu pokazuju mnogo manji stupanj ustrajnosti volatilnosti u usporedbi sa AR(1)-ARCH(4)-t modelom. Ustrajnost je čak i veća gledajući procjenu AR(1)-GARCH(1, 1)-t modela. Takvi rezultati potvrđuju tezu Lamoreuxa i Lastrapesa da deterministički pomak režima u volatilnosti može dovesti do značajne redukcije razine ustrajnosti volatilnosti. Canarella i Pollard na kraju identificiraju glavne epizode i događaje u pozadini visoko volatilnih režima i zaključuju kako su efekti svake od financijskih kriza kratkog vijeka i nakon dva do četiri mjeseca nakon svake od kriza, sva se tržišta vraćaju u nisko volatilno stanje. Prisjetimo se kako *smoothed* vjerojatnosti punog uzorka predstavljaju vjerojatnosti da je uvjetna varijanca bila u stanju  $s_t$  u vremenu  $t$ , uz dane sve obser-



Slika 3.4: *Smoothed* vjerojatnosti za stanje 2: režim visoke volatilnosti

vacije povrata. Iz toga se mogu relativno objektivno datirati veliki pomaci u volatilnosti (vidi Sliku 3.4).



# Bibliografija

- [1] <http://www.bauer.uh.edu/rsusmel/cbapage.html>.
- [2] T. Bollerslev, *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Econometrics **31** (1986), 307–327.
- [3] J. Cai, *A Markov model of regime switching ARCH*, Journal of Business & Economic Statistics **12** (1994), 309–316.
- [4] G. Canarella i S.K. Pollard, *A switching ARCH (SWARCH) model of stock market volatility: some evidence from Latin America*, International Review of Economics **54** (2007), 445–462.
- [5] S.W. Chen i J.L. Lin, *Switching ARCH models of stock market volatility in Taiwan*, Advances in Pacific Basin Business, Economics and Finance **4** (2000), 1–21.
- [6] R. Colavecchio i M. Funke, *Volatility dependence across Asia-Pacific onshore and offshore currency forwards markets*, Journal of Asian Economics **20** (2009), 174–196.
- [7] S. Edwards, *Contagion*, The World Economy **23** (2000), 873–900.
- [8] S. Edwards i R. Susmel, *Volatility dependence and contagion in emerging equity markets*, Journal of Development Economics **66** (2001), 505–532.
- [9] ———, *Interest-rate volatility in emerging markets*, The Review of Economics and Statistics **85** (2003), 328–348.
- [10] R.F. Engle, *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. inflation*, Econometrica: Journal of the Econometric Society **50** (1982), 987–1008.
- [11] R.F. Engle i C. Mustafa, *Implied ARCH models from options prices*, Journal of Econometrics **52** (1992), 289–311.

- 
- [12] S.F. Gray, *Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process*, Journal of Financial Economics **42** (1996), 27–62.
- [13] J.D. Hamilton, *Rational-expectations econometric analysis of changes in regime:: An investigation of the term structure of interest rates*, Journal of Economic Dynamics and Control **12** (1988), 385–423.
- [14] ———, *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle*, Econometrica: Journal of the Econometric Society (1989), 357–384.
- [15] ———, *Time series analysis*, Princeton University Press, 1994.
- [16] J.D. Hamilton i G. Lin, *Stock market volatility and the business cycle*, Journal of Applied Econometrics **11** (1996), 573–593.
- [17] J.D. Hamilton i R. Susmel, *Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime*, Journal of Econometrics **64** (1994), 307–333.
- [18] B.E. Hansen, *The likelihood ratio test under non-standard conditions: testing the Markov switching model of GNP*, Journal of applied Econometrics **7** (1992), S61–S82.
- [19] ———, *Erratum: the likelihood ratio test under nonstandard conditions: testing the Markov switching model of GNP*, Working Papers in Economics (1995), 337.
- [20] C.R. Harvey, *Predictable risk and returns in emerging markets*, Review of Financial Studies.
- [21] S. Kaufmann i S. Fruhwirth-Schnatter, *Bayesian analysis of switching ARCH models*, Journal of Time Series Analysis **23** (2002), 425–458.
- [22] C.J. Kim i C.R. Nelson, *State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications*, MIT Press Books **1** (1999).
- [23] C.G. Lamoureux i W.D. Lastrapes, *Persistence in variance, structural change, and the GARCH model*, Journal of Business & Economic Statistics **8** (1990), 225–234.
- [24] M.Y.L. Li i H.W.W. Lin, *Examining the Volatility of Taiwan Stock Index Returns via a Three-Volatility-Regime Markov-Switching ARCH Model*, (2003).
- [25] A. Pagan, *The econometrics of financial markets*, Journal of Empirical Finance **3** (1996), 15–102.

- [26] A. Pagan i G.W. Schwert, *Alternative models for conditional stock volatility*, Journal of Econometrics **45** (1990), 267–290.
- [27] L. Ramchand i R. Susmel, *Volatility and cross correlation across major stock markets*, Journal of Empirical Finance **5** (1998), 397–416.
- [28] G.W. Schwert, *Stock Volatility and the Crash of '87*, Review of Financial studies **3** (1990), 77–100.
- [29] R. Susmel, *Switching volatility in Latin American emerging markets*, Emerging Markets Quarterly **2** (1998), 44–56.
- [30] ———, *Switching volatility in international equity markets*, International Journal of Finance and Economics **5** (2000), 265–284.

# Sažetak

Zbog velikog utjecaja šokova na procjenu ARCH familije modela bila potrebna nova specifikacija koja dozvoljava promjene u režimu generirajućeg procesa. Cai [3] i Hamilton i Susmel [17], nezavisno predlažu SWARCH model, koji je dizajniran da obuhvati promjene režima u volatilnosti pomoću neopažene varijable stanja koja prati Markovljev lanac prvog reda sa diskretnim skupom stanja.

U ovom radu, prezentirani su SWARCH modeli, s fokusom na SWARCH model razvijen od strane Hamiltona i Susmela [17], za koji je dan i prikaz procjene parametara i značajki modela te na temelju kojeg je i napravljen primjer upotrebe modela, naveden u ovom radu. Ukratko su opisani E-SWARCH model te multivarijantni SWARCH model, kao glavna proširenja osnovnog modela.

Glavni zaključak je da model primjereno modelira pojave tijekom kojih dolazi do promjena u volatilnosti, bitno reducirajući ustrajnost utjecaja šokova i time dodatno naglašava potrebu za modelom uvjetne varijance koji dozvoljava stohastička prebacivanja. Također, model dopušta datiranje i time identifikaciju glavnih epizoda i događaja u pozadini visoko volatilnih perioda na financijskim tržištima.

# Summary

Because of the large influence of shocks on the estimation of ARCH family of models, a new specification was needed, which will allow changes in the regime of the generating process. Cai [3] and Hamilton and Susmel [17], independently suggested SWARCH model, which was designed to capture regime switches in volatility with unobserved state variable that follows first order, discrete state Markov chain.

In this paper, SWARCH models are presented, focusing on SWARCH model developed by Hamilton and Susmel [17], for which is given the parameter estimation procedure and features of the model, and on which basis was made an example of usage of the model, referred to in this paper. Also, there are brief descriptions of the E-SWARCH model and multivariate SWARCH model, as a major extensions of the basic model.

The main conclusion is that the model adequately models phenomena in which occurred the change in volatility, significantly reducing the persistence of shocks and thus further emphasizes the need for a model of conditional variance that allows the stochastic switching. Also, the model allows for time dating and identification of key episodes and events in the background of a highly volatile periods in financial markets.

# Životopis

Rođen sam u Zagrebu 21. siječnja 1987. godine. Nakon završene osnovne škole M. Langa u Bregani, upisao sam opću gimnaziju A. G. Matoša u Samoboru gdje sam 2005. godine maturirao. Tijekom školovanja sudjelovao sam u brojnim natjecanjima iz matematike i fizike, te na državnom natjecanju iz elektrotehnike.

U ljeto 2005. godine upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Matematičkog odjela u Zagrebu, koji sam završio u srpnju 2009. godine i stekao akademski naziv sveučilišnog prvostupnika matematike. Zatim sam u ljeto 2009. godine upisao Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika, na istom fakultetu. U srpnju 2011. godine stekao sam akademski naziv magistar matematike. U ljeto 2012. godine upisao sam Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički, na istom fakultetu. Od listopada 2012. godine zaposlen sam u srednjoj školi kao profesor matematike na puno radno vrijeme. U srpnju 2014. godine branim ovaj diplomski rad.